

DETERMINAZIONE DELLA RISPOSTA DI PIATTI DI BATTERIA SMORZATI MEDIANTE METODI NUMERICI

G.Genuini¹, F. Raffaelli², G. Bertini³

1 ISTI-CNR, Pisa badsound@hotmail.it

2 INFN, Pisa. fabrizio.raffaelli@pi.infn.it

3 ISTI-CNR, Pisa. graziano.bertini@isti.cnr.it

Pisa, 2/2/2011

Abstract

Nel presente lavoro viene individuata una metodologia di indagine relativa alla risposta di piatti di batteria a forze di eccitazione, mediante analisi modale, condotta con l'ausilio di un uno strumento numerico di discretizzazione agli elementi finiti (ANSYS). Ricordiamo che il metodo agli elementi finiti è un metodo variazionale basato sulla minimizzazione dell'energia del sistema. Rispetto ad un precedente articolo viene introdotto uno smorzamento interno proporzionale alla matrice di rigidità. Questo è un caso particolare dello smorzamento di **Rayleigh** proporzionale alla matrice di massa e alla matrice di elasticità. Recentemente detto smorzamento è stato interpretato in termini più fisici con un modello reologico costituito da una molla in serie con uno smorzatore e ambedue in parallelo con un altro smorzatore. Grazie a ciò il sistema possiede modi normali anche in presenza di smorzamento ed in particolare coincidenti con i rispettivi modi in assenza di smorzamento. La durata delle oscillazioni ad un impulso numerico è modulata dal coefficiente di proporzionalità per cui in futuro la sua determinazione potrà essere fatta confrontando la risposta reale dei piatti con quella simulata. La risposta, inoltre, mostra una interessante struttura, e cioè una complessa fase di attacco smorzata seguita da una, sempre smorzata, in modulazione di ampiezza a causa di probabili battimenti (fra le prime frequenze proprie modali) del primo ordine. E' notevole infine notare come le prime 7 frequenze aumentino in modo progressivo approssimativamente in ragione di 10 Hertz, corrispondenti ad una frequenza fondamentale di 15 Hertz; le frequenze, rispetto a quelle di un pianoforte, sono basse poiché il piatto ha un metro di diametro ed è poco spesso. Il piatto esaminato è suggerito dagli autori e consiste nel volume compreso fra due coni solidi di uguale base e altezze differenti.

1. Introduzione

Recentemente è stata individuata la possibilità di simulare ed implementare il comportamento di strumenti musicali, invece che per sintesi, mediante modelli fisici degli stessi.

Detti modelli sono stati applicati a strumenti a corda e a fiato[1]. In ambedue i casi è possibile, data la semplicità delle equazioni che governano il fenomeno, procedere analiticamente. Nel caso invece di una piatto di batteria, è necessario ricorrere a metodi numerici.

Nel presente lavoro viene condotta un'analisi concernente la risposta ad impulsi numerici di un particolare piatto di batteria, includendo nel modello agli elementi finiti lo smorzamento interno dello stesso. Vengono altresì elencati i limiti dell'analisi e suggeriti sviluppi futuri del lavoro.

2. Equazione del piatto circolare

Consideriamo un disco circolare di spessore h , indicando con W lo spostamento perpendicolare ad esso, con ρ la sua densità e con C il coefficiente di smorzamento, l'equazione che governa le sue oscillazioni forzate è:

$$D_E \nabla^4 W + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + C \frac{\partial W}{\partial t} = F(t) \quad (1.1)$$

nella quale

$$D_E = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

essendo E il modulo di elasticità e ν il modulo di Poisson,

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (1.1.a)$$

l'operatore bi-armonico,

con r coordinata radiale e θ coordinata tangenziale.

La (1.1) differisce dall'analogia in [2] per la presenza del termine di smorzamento interno $C \partial W / \partial t$ e della forza eccitante $F(t)$; essa è riportata nei testi di teoria dell'elasticità relativi a piastre e membrane [3]; essa è valida unicamente per piastre di spessore costante. La sua derivazione per piastre riguardanti piatti di batteria è praticamente impossibile, essendo quest'ultimi assimilabili a campane schiacciate.

Per questo motivo si è deciso di avvalersi di uno strumento di modellazione numerica ed in particolare il programma agli elementi finiti di 'general purpose' ANSYS, versione 10.

Iniziamo dunque la modellazione.

2.1 Scelta e caratteristiche del materiale

Si è scelto per queste simulazioni una lega di rame ed in particolare: bronzo C86100; le sue caratteristiche sono riportate nella sottostante tabella.

Densità ρ (Kg/m ³)	Modulo di elasticità E (GPa)	Modulo di Poisson ν
8830	103	0.34

2.2 Geometria e mescolatura del piatto

E' stato preso in considerazione un piatto di 500 cm di raggio, 100 cm di altezza con uno spessore che va da 3 mm a 1 mm e con un foro centrale di 10 mm;

. La mesh usata è stata effettuata con un grado di raffinamento pari a 5 in una scala che va da 1 a 10.

Le condizioni al contorno sono imposte sul foro centrale e riguardano gli spostamenti e le rotazioni; ambedue sono poste a zero almeno in prima approssimazione.

3. Risposta dinamica

In generale un sistema smorzato non presenta modi normali, infatti consideriamo la generale forma di un sistema elastico smorzato.

$$L[W(P,t)] + M(P) \frac{\partial^2 W(P,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial W}{\partial t} = F(t) \quad (2.1)$$

nella quale L è un operatore differenziale lineare, M la funzione di massa. Applichiamo ad esso il teorema di espansione [3]

$$w(P,t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(P) \eta_r(t) \quad (2.2)$$

nella quale w è lo spostamento, w_r è l'eresimo modo proprio non smorzato η_r una funzione del tempo da determinare; Il modo proprio soddisfa le seguenti:

$$\int_D M(P) w_r(P) w_s(P) dD(P) = \delta_{rs} \quad r,s = 1,2,\dots \quad (2.2)$$

$$\int_D w_r(P) L[w_s(P)] dD(P) = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad r,s = 1,2,\dots \quad (2.3)$$

abbiamo dunque dalla (2.1) e (2.2):

$$\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial t^2}(t) = \sum_{s=1}^{\infty} c_{rs} \frac{\partial}{\partial t} \eta_s(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = N_r(t) \quad r=1,2,\dots \quad (2.4)$$

nella quale:

$$c_{rs} = \int_D w_r(P) C[w_s(P)] dD(P) \quad r,s=1,2,\dots \quad (2.5)$$

$$N_r(t) = \int_D w_r(P) F(P,t) dD(P) \quad r=1,2,\dots \quad (2.6)$$

La (2.4) rappresenta un numero infinito di equazioni differenziali accoppiate; tuttavia imponendo condizioni sullo smorzamento è possibile disaccoppiare le equazioni del moto e avere modi propri normali. Ciò avviene se C è proporzionale alla massa e a L ; in formule:

$$C = \alpha M + \beta L \quad (2.7)$$

nella quale α e β due coefficienti di proporzionalità da determinare. La (2.7) è dovuta a **Rayleigh** [4]; si può dimostrare che essa è un caso particolare di una legge più generale [5] che pone condizioni sufficienti sull'esistenza di modi propri normali. Inoltre è possibile interpretare lo smorzamento con un modello reologico [6] basato su una molla in serie con uno smorzatore ambedue in parallelo con un altro smorzatore.

Abbiamo dunque, mutuando la notazione di un'equazione ad un grado di libertà:

$$c_{rs} = c_r \delta_{rs} = 2\zeta_r \omega_r \delta_{rs} \quad r,s=1,2,\dots \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial t^2}(t) = 2\zeta_r \omega_r \frac{\partial \eta_r}{\partial t} + \omega_r^2 \eta_r(t) = N_r(t) \quad (2.9)$$

e cioè equazioni differenziali non accoppiate.

Dalle (2.2) (2.3) è possibile poi scrivere:

$$\zeta_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \quad (2.10)$$

4. Risposta impulsiva

Poiché un impulso ideale eccita tutti i modi del piatto, la sua risposta dovrebbe contenere tutte le frequenze modali. Tuttavia non possiamo riprodurre un impulso ideale numericamente ma solo su un intervallo discreto dt . L'entità dell'intervallo dt è legato alla massima frequenza modale che vogliamo catturare; più piccolo è l'intervallo, più grande sarà la frequenza modale che cattureremo. La regola in ANSYS è:

$$dt=1/(20f)$$

(3.1)

nella quale f è la massima frequenza modale. In altre parole dobbiamo risolvere l'ampiezza del nostro intervallo in modo da avere 20 punti discreti per periodo della più grande frequenza modale.

Nel nostro caso essendo 217.45 la frequenza massima abbiamo dt uguale a $2.3 \cdot 10^{-4}$. Per quanto riguarda poi i coefficienti α e β c'è da osservare che il coefficiente α per strutture continue lineari per frequenze basse può essere posto uguale a 0. Rimane dunque da vedere come si comporta il piatto al variare di β . Si trova, come da aspettarsi, che la durata dell'oscillazione di un punto sulla periferia soggetto ad una forza impulsiva di 10 N aumenta al diminuire di β . Nella figura 1 è riportata la deformazione tipica di un modo generico Nella figura 2 è riportata invece la risposta del piatto per un coefficiente pari a 0.0001.

5. Conclusioni e sviluppi futuri

E' stato definito un modello numerico capace di simulare la risposta del piatto ad una forza impulsiva in presenza di smorzamento. Il modello di smorzamento è quello di **Rayleigh**; esso è di facile implementazione e preserva i modi propri che danno utili informazioni circa il comportamento del piatto. Il lavoro futuro riguarda la determinazione di β in modo da poter confrontare le simulazioni con la risposta registrata sperimentalmente di un piatto reale. Infine dovranno essere implementate più realistiche condizioni di vincolo.

Riferimenti

- [1] Julius O. Smith III, '*Physical Modelling Using Digital Waveguides*', Computer Music Journal, Vol 16, No. 4, Winter 1992, MIT.
- [2] G. Genuini, '*Determinazione dei modi propri di vibrazione di piatti di batteria mediante metodi numerici*', Internal Report, ISTI-CNR, 2006, Pisa.
- [3] L. Meirovitch, '*Analytical Methods in Vibrations*', Collier-MacMillan Limited, 1967, London.
- [4] Lord Rayleigh, '*The Theory of Sound*', New York, 1854.
- [5] T.K. Caughey, '*Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic System*', Journal of Applied Mechanics, June 1960.
- [6] J.F. Semblat, '*Rheological Interpretation of Rayleigh Damping*', Journal of Sound and Vibration, 1997, 206(5), 741-744.
- [7] J.G. Roederer, '*Introduction to the Physics and Psychophysics of Music*' Springer-Verlag, 1979.

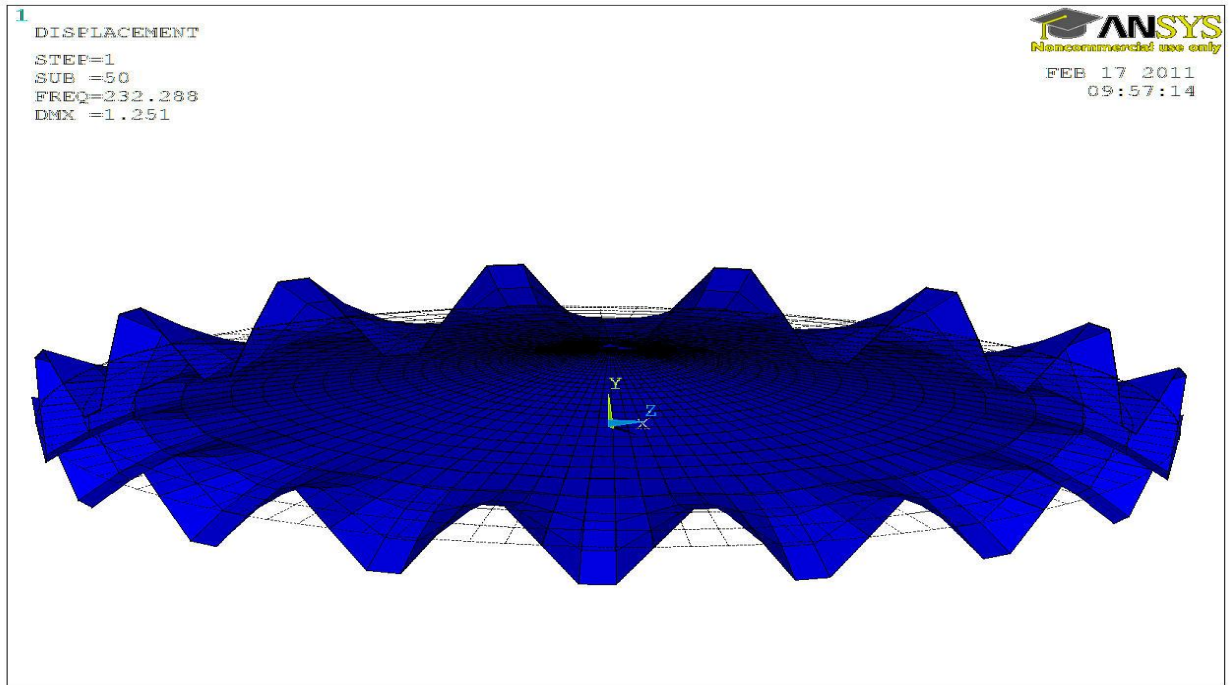


Figura 1, deformata tipica di un modo proprio.

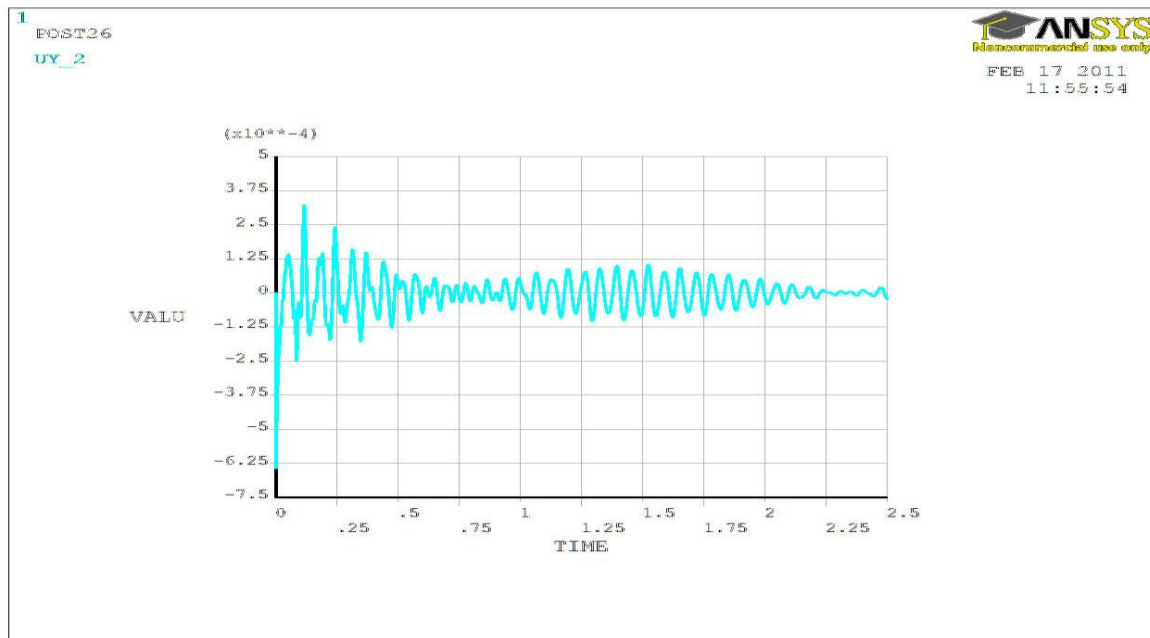


Figura . 2, risposta impulsiva del piatto.