

Un'applicazione delle tecniche di calcolo  
parallelo ad un programma agli elementi finiti.

Paolo Guidotti  
Giuseppe Pasquinelli

Rapporto C85-17

Istituto CNUCE  
PISA  
Settembre 1985

## Sommario

Dopo una breve discussione sulla possibilità di rendere eseguibili in parallelo alcune operazioni di calcolo in un programma di analisi strutturale che usi il metodo degli elementi finiti, si descrive una possibile soluzione per un programma che utilizzi un risolutore frontale.

In particolare si fa riferimento al programma NOSA sviluppato presso il CNUCE.

## Introduzione

Nei codici per analisi strutturale quale ad esempio il programma NOSA, sviluppato presso il CNUCE, ogni esecuzione di un problema può essere suddivisa in differenti fasi:

- fase 1 : i dati del problema vengono letti, interpretati e controllati per verificare la loro consistenza;
- fase 2 : si calcolano i carichi nodali equivalenti ai carichi esterni;
- fase 3 : vengono calcolate le matrici di rigidezza  $K^e$  di ciascun elemento;
- fase 4 : si risolve il sistema lineare ottenuto assemblando le matrici di rigidezza  $K^e$  ed il vettore dei carichi nodali  $f^e$ :

$$Kx=f$$

- fase 5 : si integrano le equazioni costitutive, cioè, si calcolano le tensioni e le deformazioni all'interno di ciascun elemento. Se il problema è non lineare, vengono inoltre calcolati i carichi residui non equilibrati;
- fase 6 : si eseguono i controlli di convergenza e, nel caso essi siano verificati, si stampano i risultati.

Se il problema è non lineare ed il processo di carico è incrementale, le fasi 2,3,4,5 vengono ripetute per ogni incremento.

Ciascuna di queste fasi di calcolo ha algoritmi e tempi di esecuzione differenti tra loro.

La fase 1 è un processo essenzialmente sequenziale e comunque essa richiede un tempo di esecuzione che non supera in generale il 5% del tempo totale.

Le fasi 2,3 e 5 sono, per loro stessa natura, parallelizzabili.

Infatti il processo di calcolo durante queste fasi viene eseguito elemento per elemento e le informazioni necessarie sono disponibili per l'intera struttura fin dall'inizio della fase stessa.

Il tempo di calcolo richiesto da queste due fasi non supera il 30% del tempo totale.

La fase 4 è normalmente la più costosa in termini di tempo di calcolo e può superare il 50% del tempo totale di esecuzione. Sebbene la soluzione di un sistema di equazioni lineari, con metodi non iterativi, sia essenzialmente un processo sequenziale, esistono metodi per risolvere il sistema in modo che alcune parti di calcolo possano essere eseguite in parallelo.

Si può ad esempio utilizzare la fattorizzazione di Cholesky della matrice opportunamente partizionata in più sottomatrici. Questi metodi richiedono comunque la costruzione della matrice  $K$ , operazione che richiede una notevole occupazione di memoria. Interessante, ci sembra, invece l'utilizzo della tecnica di risoluzione frontale, utilizzata nel programma NOSA, e che non richiede l'assemblaggio della matrice di rigidità globale  $K$ .

La fase 6 infine richiede un tempo di esecuzione inferiore alla fase 1.

Partendo dalle considerazioni precedenti le fasi che possono essere parallelizzate con un significativo risparmio di tempo sono le fasi 2-3-4-5.

Il metodo più conveniente è suddividere la struttura in più parti che diremo sottostrutture, ciascuna delle quali è descritta da un insieme di elementi.

In questo modo le fasi 2,3 e 5 possono essere calcolate parallelamente per ciascuna sottostruttura.

Utilizzando inoltre la tecnica frontale una parte consistente della fase 4 può essere eseguita contemporaneamente per ciascuna sottostruttura.

Poiché le fasi 2,3 e 5 non presentano alcuna difficoltà per essere adattate ad un calcolatore parallelo, daremo qui di seguito una breve descrizione del metodo di risoluzione frontale per poi vedere le modifiche che è necessario apportare nel trattare sottostrutture.

## Risolutore frontale

La tecnica frontale per la soluzione di sistemi di equazioni lineari, ottenuti dall'applicazione del metodo degli elementi finiti, è stata sviluppata da B. M. Irons ed è basata sul metodo dell'eliminazione gaussiana.

Essa si è rivelata molto efficiente se impiegata in programmi che usano il metodo degli elementi finiti; infatti richiede un'occupazione di memoria limitata, paragonabile a quella richiesta dai risolutori a profilo, pur non essendo necessaria un'accurata numerazione dei nodi.

Si abbia il sistema:

$$1) \quad Kx=f$$

dove  $K$  è una matrice definita positiva,  $x$  il vettore delle incognite ed  $f$  il vettore dei termini noti.

Con il metodo degli elementi finiti i termini  $K_{is}$  della matrice  $K$  sono somma dei contributi associati a ciascun elemento. Usando l'eliminazione gaussiana ogni qualvolta si elimina l'equazione  $s$ , su ogni coefficiente  $K_{is}$ , con  $i < s$ , e ogni termine noto  $f_i$  operiamo le seguenti operazioni:

$$2) \quad K_{is}^* = K_{is} - \left( \frac{K_{is} K_{ss}}{K_{ss}} \right)$$

$$f_i^* = f_i - \left( \frac{K_{is} f_s}{K_{ss}} \right)$$

Si osservi che, quando si elimina l'equazione  $s$ , non è necessario che tutti i coefficienti  $K_{is}$  e  $f_i$  in 2) siano completi, cioè che essi siano la somma di tutti i contributi, ma è sufficiente che lo siano i termini tra parentesi.

Inoltre, se  $K_{is}$  e  $K_{ss}$  sono nulli, il termine  $K_{is}$  rimane invariato, pertanto possono essere tenuti in memoria solo i coefficienti corrispondenti ai termini non nulli dell'equazione  $s$ . Di fatto si tengono in memoria solo le equazioni i cui coefficienti non sono ancora completi e si memorizza in un supporto magnetico le equazioni eliminate. Il numero di equazioni presenti in ogni istante in memoria è indicato come la lunghezza del fronte. In genere la matrice  $K$  ha un numero elevato di coefficienti nulli e questo riduce in modo drastico l'occupazione di memoria.

Il processo di eliminazione consiste dunque in fasi alterne in cui si sommano i contributi dei vari elementi, assemblaggio, e si eliminano le equazioni complete, i cui coefficienti non avranno più contributi.

Terminata la fase di eliminazione, triangolarizzata cioè la matrice  $K$ , si può operare la sostituzione all'indietro. Per una descrizione più approfondita del metodo si rimanda all'articolo originale di Irons [1].

Si consideri ora una maglia suddivisa in più parti dette sottostrutture, ciascuna individuata da un insieme di elementi.

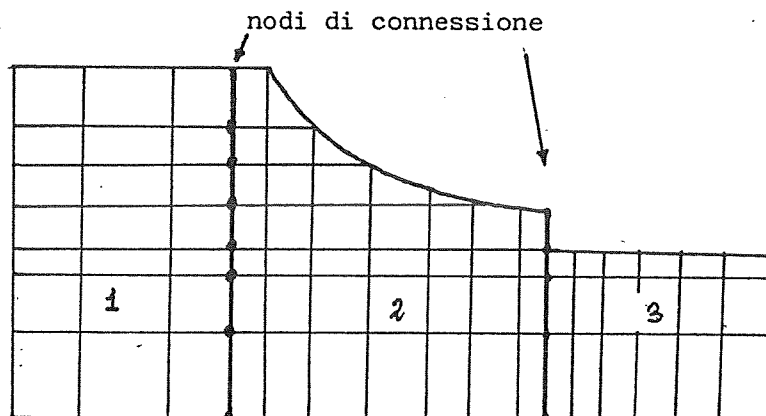


Fig. 1

Ogni sottostruttura ha in comune con le altre sottostrutture nodi che diremo di connessione.

Il procedimento di assemblaggio e di eliminazione precedentemente descritto può essere eseguito indipendentemente per ciascuna sottostruttura; infatti per ciascuna sottostruttura  $k$  potremo scrivere:

$$3) \quad K^{(k)} x^{(k)} = f^{(k)}$$

essendo  $K^{(k)}$  la matrice di rigidezza corrispondente alla  $k$ -esima sottostruttura e  $x^{(k)}$  e  $f^{(k)}$  rispettivamente i vettori delle variabili nodali incognite e delle forze nodali equivalenti che agiscono sulla sottostruttura.

Si deve notare che le equazioni corrispondenti ai gradi di libertà dei nodi di connessione non possono essere eliminate, ma sono presenti nel fronte di ciascuna sottostruttura per tutta la fase di eliminazione. Infatti i coefficienti delle equazioni corrispondenti ai gradi di libertà dei nodi di connessione non potranno essere completate se non quando si sommino insieme i contributi dovuti alle altre sottostrutture.

Questo equivale a considerare ciascuna sottostruttura come un unico elemento che possiede solo nodi di connessione.

Ciascuna sottostruttura può essere così assemblata e la soluzione del sistema ottenuto permette la determinazione delle incognite associate ai nodi di connessione.

Conosciute queste, è possibile ricavare in maniera indipendente per ogni sottostruttura le variabili incognite mediante back-sostituzione.

Come esempio si consideri la seguente semplice maglia composta di 3 elementi e che supponiamo suddivisa in due sottostrutture: la prima composta dal solo elemento 1 e la seconda dai due elementi 2-3.

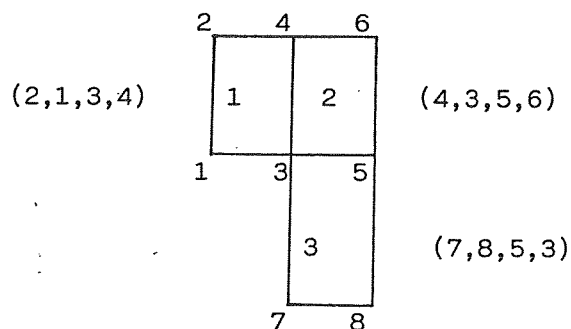


Fig. 2

Supponiamo inoltre che ogni singolo nodo abbia un solo grado di libertà e che ciascun elemento sia individuato dai nodi posti nella sequenza indicata tra parentesi nella figura.

Prendiamo in considerazione la sola fase di assemblaggio ed eliminazione.

Per la prima sottostruttura, dopo l'assemblaggio dell'unico elemento, otteniamo la matrice

	2	1	3	4
2	$K_{22}$	$K_{21}$	$K_{23}$	$K_{24}$
1	$K_{12}$	$K_{11}$	$K_{13}$	$K_{14}$
3	$K_{32}$	$K_{31}$	$K_{33}$	$K_{34}$
4	$K_{42}$	$K_{41}$	$K_{43}$	$K_{44}$

in cui accanto a ciascuna riga e colonna indichiamo il numero delle variabili corrispondenti.

Eliminando le equazioni corrispondenti alle incognite 1 e 2 otteniamo

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 0 & 0 & 3 & 4 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5) & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 3 & 0 & 0 & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\
 & & 4 & 0 & 0 & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)}
 \end{array}$$

Le equazioni corrispondenti alle incognite 3 e 4 non sono complete, ad esse vanno aggiunti i contributi degli elementi 2 e 3.

Seconda sottostruttura: Assemblando il primo elemento ed eliminando l'equazione corrispondente alla variabile 6, che è completa, si ottiene

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & 3 & 5 & 6 & 4 & & 3 & 5 & 0 & 4 \\
 6) & 3 & K_{33} & K_{35} & K_{36} & K_{34} & 3 & K_{33}^* & K_{35}^* & 0 & K_{34}^* \\
 & 5 & K_{53} & K_{55} & K_{56} & K_{54} & 7) & 5 & K_{53}^* & K_{55}^* & 0 & K_{54}^* \\
 & 6 & K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{64} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 4 & K_{43} & K_{45} & K_{46} & K_{44} & & 4 & K_{43}^* & K_{45}^* & 0 & K_{44}^*
 \end{array}$$

Assemblando il secondo elemento ed eliminando le equazioni complete si ottiene rispettivamente:

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
 & 3 & 5 & 7 & 4 & 8 & & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
 8) & 3 & K_{33}^I & & & & & 3 & K_{33}^{(2)} & 0 & 0 & K_{43}^{(2)} & 0 \\
 & 5 & K_{53}^I & K_{55}^I & & \text{Sym} & 9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 7 & K_{73} & K_{75} & K_{77} & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 4 & K_{43}^I & K_{45}^I & K_{47} & K_{44}^I & & 4 & K_{43}^{(2)} & 0 & 0 & K_{44}^{(2)} & 0 \\
 & 8 & K_{83} & K_{85} & K_{87} & K_{84} & K_{88} & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

Si osservi che, assemblando il secondo elemento, il numero di equazioni presenti in memoria è aumentato, cioè il fronte è cresciuto.



Dopo l'eliminazione rimarranno in memoria solo i coefficienti relativi ai gradi di libertà legati ai nodi di connessione.

Le matrici in 5 e 9 devono essere "assemblate" insieme, sommando per ogni equazione i coefficienti corrispondenti.

Conoscendo la posizione di ciascuna variabile nelle due matrici 5 e 9, questo può essere ottenuto facilmente. Eliminando le righe e le colonne nulle si ottiene la matrice

$$\begin{array}{r}
 3 \quad K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} \quad K_{34}^{(1)} + K_{34}^{(2)} \\
 4 \quad K_{43}^{(1)} + K_{43}^{(2)} \quad K_{44}^{(1)} + K_{44}^{(2)}
 \end{array}$$

In essa tutti i coefficienti sono completi; si possono così determinare le variabili nodali 3 e 4 ed eseguire la back-sostituzione per ciascuna sottostruttura. Si può osservare che durante tutta la fase di eliminazione, per ciascuna sottostruttura, le variabili appartenenti ai nodi di connessione non possono essere eliminate. Inoltre esse occupano nella matrice di lavoro posizioni che di volta in volta vengono trovate libere. Questo può portare ad un aumento eccessivo dello spazio di lavoro richiesto (ampiezza del fronte).

E' opportuno allora spostare le righe e le colonne di questi gradi di libertà in modo che essi occupino le prime righe e colonne della matrice di lavoro. Questa operazione può essere compiuta al termine dell'assemblaggio di ciascun elemento.

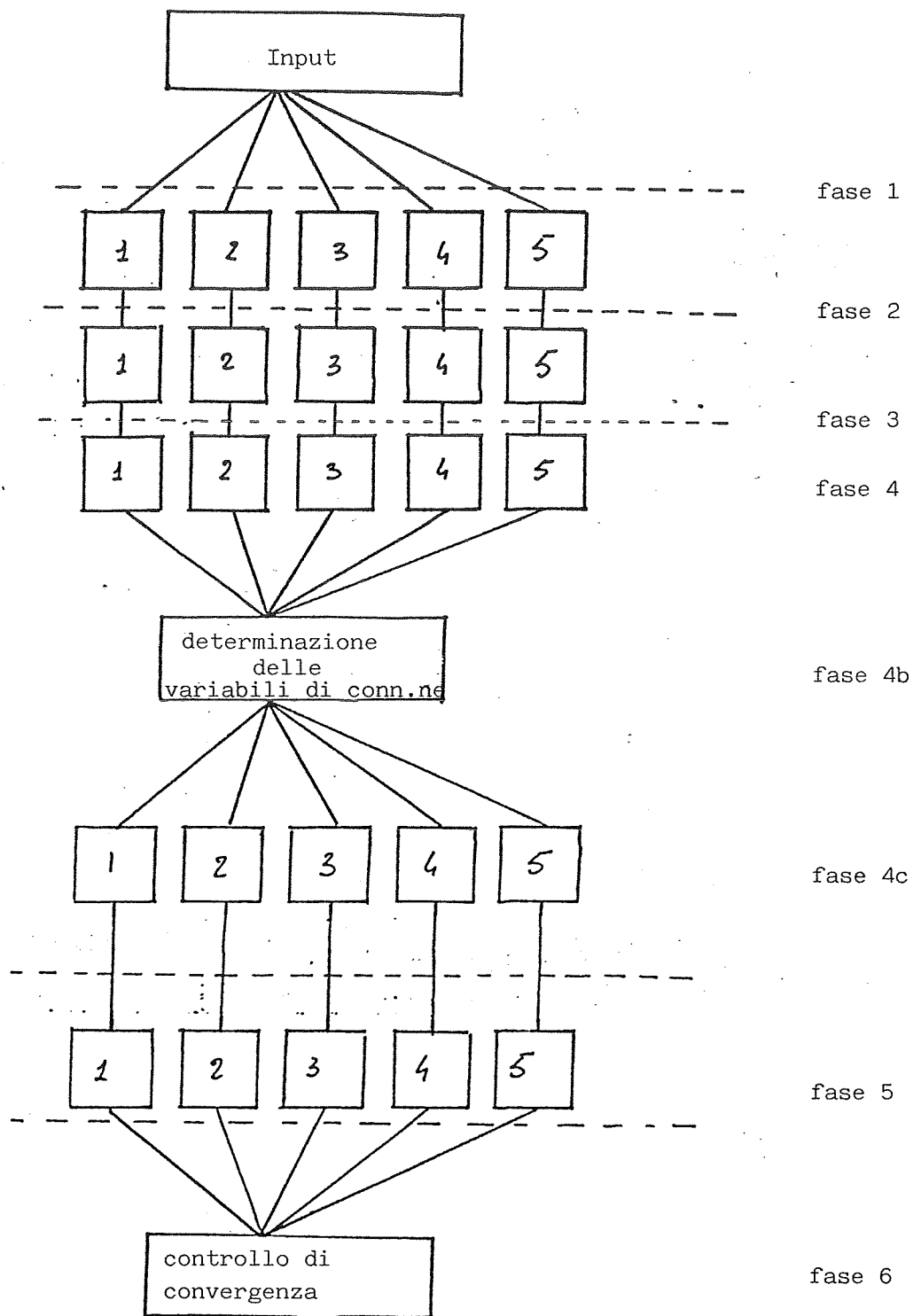


Fig. 3

## Conclusioni

Il metodo proposto permette di intervenire su un codice di calcolo già sviluppato limitando il numero di interventi; ciò consente di "recuperare" il lavoro di anni che normalmente richiede lo sviluppo di un programma agli elementi finiti.

La scelta del risolutore frontale permette inoltre di dividere in processi indipendenti un'ampia parte del procedimento di calcolo, vedi Fig. 3.

Esso infatti non richiede la costruzione della matrice di rigidezza globale  $K$ , che invece è indispensabile con altri metodi.

Questo aggiunto al fatto che durante la risoluzione lo scambio di informazioni è limitato ad un'unica fase riduce al minimo l'interazione tra i processi di calcolo di ciascuna sottostruttura.

E' opportuno osservare infine che utilizzando opportunamente la tecnica della sottostrutturazione in alcuni problemi non lineari, quali ad esempio lo studio del comportamento elasto plastico di una struttura, i tempi di esecuzione possono essere notevolmente ridotti.

Si consideri ad esempio una piastra forata e caricata come nella figura seguente:

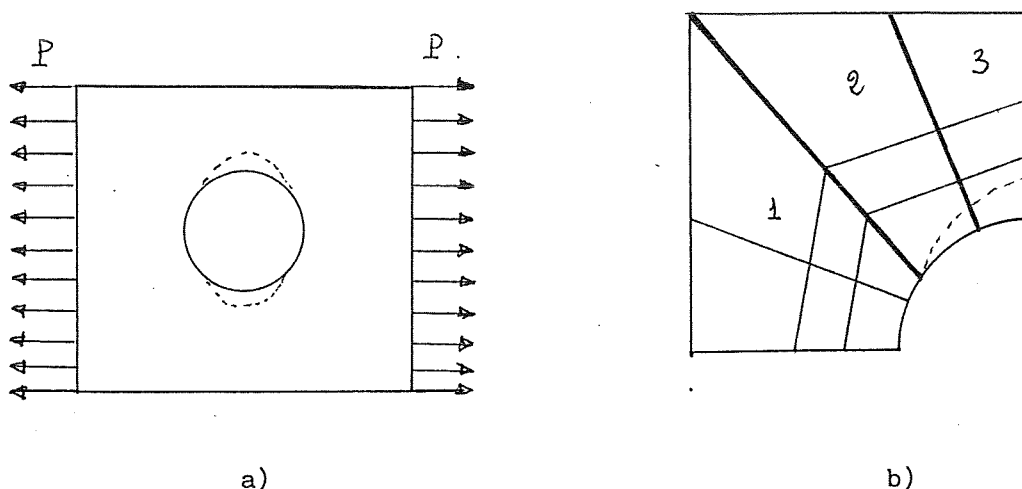


Fig. 4

La zona plastica sarà localizzata sui bordi superiore ed inferiore del foro. Si suddivide opportunamente la maglia in più sottostrutture di cui solo alcune interessate al fenomeno di plasticizzazione (Fig. 4b).

Durante il processo iterativo di soluzione non è necessario eseguire le fasi di calcolo delle matrici di rigidezza ed eliminazione (fasi 3 e 4a di Fig. 3) per la sottostruttura 1, poichè in essa le matrici di rigidezza dei singoli elementi non cambiano durante tutto il calcolo.

## Bibliografia

- 1 - Irons, B.M..  
A frontal solution program.  
Int. J. Hum. Meth. Eng. 2,5-32, 1970.
- 2 - E. Ainton, D.R.J. Owen.  
Finite Element programming.  
Academic Press 1977.
- 3 - A. Jennings.  
Matrix computation for Engineers and Scientist.  
John Wiley & Soms 1978.