ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires.* Note (*) de MM. **Haim Brézis** et **Guido Stampacchia**, présentée par M. Jean Leray.

On réduit l'étude d'un écoulement plan, stationnaire, irrationnel d'un fluide parfait et compressible autour d'un profil convexe symétrique à celle d'une inéquation variationnelle dans le plan de l'hodographe.

1. L'ÉQUATION DE L'ÉCOULEMENT DANS L'HODOGRAPHE. — Dans le plan physique (x, y), le vecteur vitesse $\vec{q} = (u, v)$ vérifie les équations

$$\operatorname{div}(\rho \vec{q}) = 0 \quad (\rho \text{ est la densité}), \qquad \operatorname{rot} \vec{q} = 0$$

ainsi $\vec{q} \to \vec{q}_\infty$ quand $|x|^2 + |y|^2 \to +\infty$ (écoulement uniforme à l'infini). On suppose connue la relation liant ρ et la vitesse $q = |\vec{q}|$, soit $\rho = h(q)$ où h est une fonction décroissante de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$. Introduisant le potentiel des vitesses φ et la fonction courant ψ, on est conduit classiquement à des équations non linéaires du second ordre :

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\varphi_{xx} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\varphi_{yy} - \frac{2\,uv}{a^2}\varphi_{xy} = 0$$

et

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\psi_{xx} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\psi_{yy} - \frac{2\,uv}{a^2}\psi_{xy} = 0,$$

où $a^2(q) = -q\,[h(q)/h'(q)]$ est la vitesse locale du son.

Après le changement de variables

$$\mathfrak{T} : \quad (x, y) \to (u, v) \to (\theta, q) \qquad \text{où} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{v}{u}$$

qui fait passer du plan physique au plan de l'hodographe, on obtient l'équation de Chaplygin :

$$(1) \qquad q\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{qh(q)}\right)\psi_{\theta\theta}(\theta, q) = \left(\frac{q}{h(q)}\psi_q\right)_q(\theta, q).$$

Suivant l'habitude, on remplace q par la variable σ liée à q par la relation

$$(2) \qquad \sigma = \int_q^{q_c} h(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

où q_c est une constante choisie de sorte que $a(q_c) = q_c$.

Posant $k(q) = 1/h^2(q)\{1 - [q^2/a^2(q)]\}$ [on pourra aussi considérer k comme fonction de σ à l'aide de (2)], l'équation (1) devient alors

$$(3) \qquad \psi_{\sigma\sigma} + k\,\psi_{\theta\theta} = 0.$$

Pour les détails, nous renvoyons à (1) et (2) où l'on trouvera aussi une abondante bibliographie.

2. Les conditions aux limites dans l'hodographe. — Commençons par une description heuristique du problème. Le profil $\mathfrak{P}$ est supposé symétrique par rapport à l'axe $x'x$ portant $\vec{q}_\infty$ et nous considérons des écoulements symétriques autour de $\mathfrak{P}$. On pourra alors se restreindre à l'étude de l'écoulement dans le demi-plan supérieur où $\psi \geq 0$ (par convention $\psi = 0$ sur la ligne de courant x' AB x).

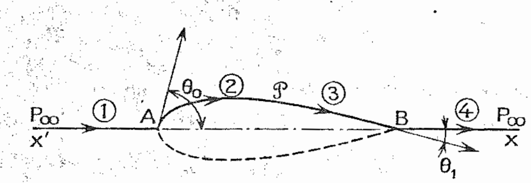

Fig. 1

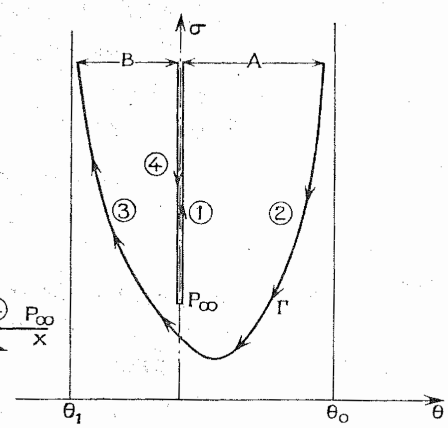

Fig. 2

Fig. 1. — Plan physique.

Fig. 2. — Plan de l'hodographe.

Le profil $\mathfrak{P}$ est transformé par $\mathcal{T}$ en une courbe Γ que l'on supposera entièrement située dans le demi plan $\sigma > 0$ (ce qui correspond à un écoulement *totalement subsonique*). On désigne par $\theta = \theta(\mathrm{P})$ l'angle que la tangente à $\mathfrak{P}$ en $\mathrm{P} \in \mathfrak{P}$ forme avec l'axe $x'x$ et par $\mathrm{R}(\theta)$ le rayon de courbure algébrique (supposé fini) de $\mathfrak{P}$ en P. On supposera que $\theta_0 - \theta_1 < \pi$ où $\theta_0 = \theta(\mathrm{A})$ et $\theta_1 = \theta(\mathrm{B})$. La courbe Γ représente la distribution des vitesses le long du profil P en fonction de θ (et donc dépend de ψ). Insistons sur le fait que Γ n'est pas donné *a priori* dans l'hodographe, mais doit être considéré comme une frontière libre.

Le long de Γ, d'équation $\sigma = l(\theta)$, on a

$$\psi = 0, \tag{4}$$

$$\psi_\sigma = \frac{\mathrm{R}\,q}{1 + k\left(\dfrac{dl}{d\theta}\right)^2}, \qquad \psi_\theta = \frac{\mathrm{R}\,q\,\dfrac{dl}{d\theta}}{1 + k\left(\dfrac{dl}{d\theta}\right)^2} \quad [cf\ (^2),\ \text{p. } 46]. \tag{5}$$

D'autre part :

$$\psi(0, \sigma) = 0 \quad \text{pour } \sigma \geq \sigma_\infty \qquad \text{où} \quad \sigma_\infty = \int_{q_\infty}^{q_c} h(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}. \tag{6}$$

Enfin des considérations physiques (l'écoulement au voisinage des bords A et B est assimilé à l'écoulement dans un angle) suggèrent que $\psi(\theta, \sigma) \to 0$ quand $\sigma \to +\infty$.

3. CHANGEMENT DE FONCTION INCONNUE. — Nous introduisons la fonction

$$u(\theta, \sigma) = \int_{l(\theta)}^{\sigma} \frac{k(\tau)}{q(\tau)} \psi(\theta, \tau)\, d\tau,$$

définie pour $\sigma > l(\theta)$ et $\theta_1 < \theta < \theta_0$ ([3]).

On établit, grâce aux équations (3)-(6) que u vérifie

$$\left\{\begin{array}{rl} \dfrac{1}{q^2}\left(\dfrac{q^2}{k} u_\sigma\right)_\sigma + u_{\theta\theta} + u = -\mathrm{R} & \text{sur } \varpi, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \operatorname{grad} u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u(0, \sigma) = \mathrm{Cte} = \mathrm{H}_p & \text{pour } \sigma \geqq \sigma_\infty, \end{array}\right.$$

où

$$\varpi = \{ [\theta, \sigma]; \sigma > l(\theta) \text{ et } \theta_1 < \theta < \theta_0 \} \setminus \{ [0, \sigma]; \sigma \geqq \sigma_\infty \}.$$

On prolonge u par 0 en dehors de $\overline{\varpi}$ dans

$$\Omega = \{ [\theta, \sigma];\ \theta_1 < \theta < \theta_0 \text{ et } \sigma > 0 \}.$$

On considère l'espace fonctionnel

$$\mathrm{V} = \left\{ v;\ qv \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ qv_\theta \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

et pour tout $\mathrm{H} > 0$, le convexe

$$\mathrm{K}_{\mathrm{H}} = \{ v \in \mathrm{V};\ v \geqq 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } v(0, \sigma) = \mathrm{H} \text{ pour } \sigma \geqq \sigma_\infty \}.$$

On introduit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{k} u_\sigma v_\sigma + u_\theta v_\theta - uv \right) q^2\, d\theta\, d\sigma$$

qui est coercive sur V à cause de l'hypothèse $\theta_0 - \theta_1 < \pi$.

THÉORÈME. — *Si* $\mathrm{R} \leqq 0$ (*ce qui correspond à un profil* $\mathfrak{L}$ *convexe*), *on a* $u \in \mathrm{K}_{\mathrm{H}_p}$ *et*

(7) $$a(u, v - u) \geqq \int \mathrm{R}(v - u)\, q^2\, d\theta\, d\sigma \quad \textit{pour tout } v \in \mathrm{K}_{\mathrm{H}_p}.$$

Il est bien connu [*cf.* par exemple ([4])] que pour tout $\mathrm{H} > 0$, il existe $u \in \mathrm{K}_{\mathrm{H}}$, unique solution de l'inéquation

$$a(u, v - u) \geqq \int_\Omega \mathrm{R}(v - u)\, q^2\, d\theta\, d\sigma;$$

on prouve (à l'aide du principe du maximum) que $u_\sigma \geqq 0$.

Il reste enfin à déterminer la valeur de H, de manière à ce que la solution correspondante soit physiquement acceptable. A cet effet, on montre que $w(\theta) = \lim_{\sigma \to +\infty} u(\theta, \sigma)$ est la solution de l'inéquation variationnelle

$$w \in \mathcal{K}_H = \{ \zeta \in H_0^1(\theta_1, \theta_0),\ \zeta \geq 0 \text{ sur }]\theta_1, \theta_0[,\ \zeta(0) = H \}$$

et

$$\int_{\theta_1}^{\theta_0} w_\theta (\zeta_\theta - w_\theta) - w(\zeta - w)\, d\theta \geq \int_{\theta_1}^{\theta_0} R(\zeta - w)\, d\theta \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathcal{K}_H.$$

Par ailleurs, il est nécessaire que $w > 0$ sur $]\theta_1, \theta_0[$ et que

$$w_\theta(\theta_0) = w_\theta(\theta_1) = 0.$$

La seule valeur admissible pour H est alors

$$H_p = -\int_0^{\theta_0} R(\tau) \sin \tau \, d\tau = -\int_0^{\theta_1} R(\tau) \sin \tau \, d\tau$$

qui représente la moitié de l'épaisseur maximum du profil $\mathcal{T}$.

Conclusion. — Étant donnés $\vec{q}_\infty$ et un profil $\mathcal{T}$ vérifiant les propriétés indiquées ci-dessus, on résoud l'inéquation variationnelle (7); on désigne par $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $[\theta, \sigma] \in \Omega$ où $u(\theta, \sigma) > 0$. Si $\overline{\mathcal{D}} \cap \{ \sigma = 0 \} = \emptyset$ alors $\psi = (q/k)\, u_\sigma$ représente sur $\mathcal{D}$ la fonction courant cherchée. On a ainsi réduit le problème envisagé à la résolution d'une inéquation variationnelle pour laquelle on connaît des méthodes numériques efficaces.

Ce travail a été effectué, en partie, pendant la visite du premier auteur à l'École Normale Supérieure de Pise; son séjour a été subventionné par l'Académie dei Lincei.

(*) Séance du 18 décembre 1972.

(1) L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, Chapman and Hall, London, 1958.

(2) C. Ferrari et F. Tricomi, *Aerodinamica transonica Cremonese*, Rome, 1962.

(3) On montre que u est lié par une relation simple à la transformée de Legendre Ψ de ψ; plus précisément on a $\Psi + q\rho u = q\rho (y_0(\theta) \cos \theta - x_0(\theta) \sin \theta)$ où $x_0(\theta)$ et $y_0(\theta)$ sont les coordonnées du point $P \in \mathcal{T}$ où la tangente à $\mathcal{T}$ fait un angle θ avec l'axe $x'x$. Un changement semblable de fonction inconnue est utilisé par C. Baiocchi dans un problème à frontière libre en hydrodynamique (*Annali di Mat. Pura ed Applic.*, 92, 1972, p. 107-127).

(4) J. L. Lions et G. Stampacchia, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, 1967, p. 493-519.

H. B. : *Mathématiques, Université Paris VI, 9, quai Saint-Bernard, 75005 Paris;*

G. S. : *Scuola Normale Superiore, Pisa, Italia.*