Archivio

METODO DI NEWTON RAPHSON PER LA RICERCA DELLA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO $\alpha > 0$

Sia α_0 una qualunque approssimazione della $\sqrt{\alpha}$ con la condizione che sia $\alpha_0^2 - \alpha > 0$ (cosa che si può fare prendendo $\alpha_0 = 1$).

Sarà $\sqrt{\alpha} = \alpha_0 + \bar{h}$ con $\bar{h}$ determinato dalla soluzione dell'equazione

$$0 = f(\alpha_0 + \bar{h}) = f(\alpha_0) + f'(\alpha_0)\,\bar{h} + \frac{f''(\alpha_0)}{2}\,\bar{h}^2 + \ldots\ldots \text{ etc.}$$

dove f è una funzione così definita $f(x) = x^2 - \alpha$

Approssimiamo $\bar{h}$ cercando più semplicemente la soluzione della equazione: $f(\alpha_0) + f'(\alpha_0)\,h = 0$ sarà: $\bar{h} = -\dfrac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}$

Il numero $\alpha_1 = \alpha_0 + h = \alpha_0 - \dfrac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}$ costituisce una nuova approssimazione di $\sqrt{\alpha}$.

Determiniamo induttivamente la successione di valori $\{\alpha_i\}$ con $\alpha_{i+1} = \alpha_i - \dfrac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}$ cioè $\alpha_{i+1} = \alpha_i - \dfrac{\alpha_i^2 - \alpha}{2\alpha_i} =$

$$= \frac{\alpha_i}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha_i} \qquad (1)$$

Si dimostra che esiste il limite della successione $\{\alpha_i\}$ e che esso è uguale alla richiesta $\sqrt{\alpha}$. Infatti:

è, infatti per ipotesi $\alpha_1 - \alpha_0 = -\dfrac{\alpha_0^2 - \alpha}{2\alpha_0} < 0$ dimostriamo

che dall'essere $\alpha_i - \alpha_{i-1} < 0$ segue che è $\alpha_{i+1} - \alpha_i < 0$

Infatti essendo $0 > \alpha_i - \alpha_{i+1} = -\dfrac{\alpha_{i-1}^2 - \alpha}{2\alpha_{i-1}}$, sarà

$$\alpha_{i-1}^2 - \alpha > 0.$$

Per dimostrare che è $\alpha_{i+1} - \alpha_i < 0$ basterà far vedere analogamente che è $\alpha_i^2 - \alpha > 0$

Infatti:

$$\alpha_i^2 - \alpha = \left(\frac{\alpha_{i-1}}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_{i-1}} \right)^2 - \alpha =$$

$$= \frac{\alpha_{i-1}^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4\alpha_{i-1}} + \frac{\alpha}{2} - \alpha = \left(\frac{\alpha_{i-1}}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_{i-1}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\alpha_{i-1}^2 - \alpha}{2\alpha_{i-1}} \right)^2 > 0$$ essendo per ipotesi $\alpha_{i-1}^2 - \alpha > 0$

b) poichè per la decrescenza esiste certamente il $\lim\limits_{i\to\infty} \{\alpha_i\} = \xi$

Vediamo che tale limite è uguale alla radice cercata:

e per la 1) $\xi = \dfrac{\xi}{2} + \dfrac{\alpha}{2\xi} = \dfrac{\xi^2 + \alpha}{2\xi}$ da cui:

$$2\xi^2 = \xi^2 + \alpha \quad \text{cioè} \quad \xi^2 = \alpha \;:\; \xi = \sqrt{\alpha}$$

C.V.D.

Vediamo adesso l'ordine di convergenza della successione $\{\alpha_i\}$

sia $\varepsilon_i = \sqrt{\alpha} - \alpha_i$

Sussiste la seguente relazione $\left|\xi_i\right| < \frac{M}{2m} \left|\xi_{i-1}\right|^2$

dove: $\left.\begin{array}{l} M = \max \ f''(x) \\ m = \min \ f'(x) \end{array}\right\}$

Il max e il min sono calcolati sull'intervallo in cui potranno variare le approssimazioni α_i, intervallo che per la decrescenza della successione $\{\alpha_i\}$ sarà dato da $(\sqrt{a}, \alpha_0)$

Volendo una maggiore esattezza nella maggiorazione sarà valida anche la seguente formula

$$\left|\xi_i\right| < \frac{M}{2 f'(\alpha_{i-1})} \left|\xi_{i-1}\right|^2 \qquad \text{cioè:}$$

$$\left|\xi_i\right| < \frac{M}{2.2 \alpha_{i-1}} \left|\xi_{i-1}\right|^2$$

Dimostrazione:

Si ha:

(1) $\xi_{i+1} = \xi - \alpha_{i+1}$

(2) $\xi_i = h_i = \xi - \alpha_i$

dove h_i è la soluzione di

$0 = f(\alpha_i + h_i) = f(\alpha_i) + h_i f'(\alpha_i) + \frac{h_i^2}{2} f''(\varphi)$

dove φ è un opportuno punto intermedio fra α_i e $\alpha_i + h_i$

$\alpha \quad = \alpha \qquad f(\alpha_i)$

segue che:

$$\varepsilon_{i+1} = \xi - \alpha_{i+1} = \xi - \alpha_i + \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} = \text{per la (2)} =$$

$$= h_i + \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} = \frac{h_i f'(\alpha_i) + f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} = \text{per la (3)} =$$

$$= - \frac{h_i^2 f''(\varphi)}{2 f'(\alpha_i)} = \text{per la (2)} = - \frac{\varepsilon_i^2 f''(\varphi)}{2 f'(\alpha_i)}$$

quindi: $\left|\varepsilon_{i+1}\right| \leq \frac{M}{2 f'(\alpha_i)} \left|\varepsilon_i\right|^2$ dove $M = \max\limits_{=2} f''(x)$

e a maggior ragione $\left|\varepsilon_{i+1}\right| \leq \frac{M}{2 m} \left|\varepsilon_i\right|^2$

dove $m = \min f'(\alpha_i) =$

Come si vede quindi la convergenza di $\{\alpha_i\}$ è molto veloce.